Fonctions d'une variable réelle

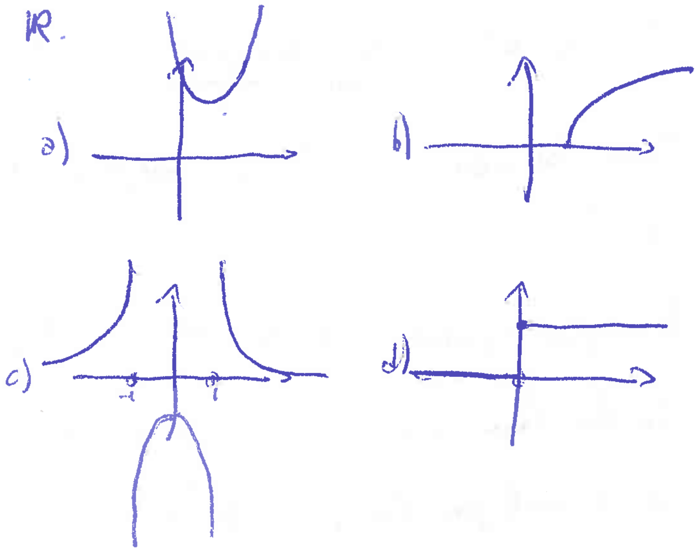
Déf: Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : A \to \mathbb{R}$, où $A \subseteq \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

Exemples: a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ $(A = \mathbb{R})$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $(A = [1; +\infty[)$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $(A = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\})$.

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $(A = \mathbb{R})$



Caractéristiques d'une fonction

Domaine de définition: Il arrive qu'on donne une fonction f par une expression algébrique, sans spécifier l'espace de départ.

Dans ce cas on appelle domaine de définition de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où l'expression algébrique a un sens. On note D_f le domaine de déf. de f.

Ex: a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $D_f = [1; +\infty[$, c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Graphe. Il est le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ défini par $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f\} =: \Gamma_f$

Le graphe Γ_f intersecte toute droite verticale en au plus un point (en 1 point si et seulement si $\{x = c\}$, $c \in D_f$)

Parité: Supposons que D_f soit symétrique par rapport à 0 (c-à-d, si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$). Alors une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite:

- paire si $\forall x \in D_f$, on a $f(x) = f(-x)$.
- impaire si $\forall x \in D_f$, on a $f(x) = -f(-x)$

Exemples: x^2; $\cos x$ sont paires, x^3, $\sin x$ sont impaires

Periodicité : Une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est dite <u>périodique</u> si $\exists T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathcal{D}_f$ (t.q. ~~x~~ $x+T \in \mathcal{D}_f$)

T est dit <u>une période</u> de f.

Dans le cas où $\exists T_0$ ~~la~~ plus petite période de f, on appelle T_0 <u>la</u> période de f.

Exemples i) $\cos x$, $\sin x$ sont 2π-périodiques.

2) la fonction constante est périodique : $\forall T > 0$ $c(x) = c(x+T) = c$.
il n'existe pas la plus petite période (car $\inf\{\text{périodes}\} = 0$)

3) la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ est périodique.

$\forall T \in \mathbb{Q}_+$, $\chi_{\mathbb{Q}}(x+T) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

Injectivité / Surjectivité / Bijectivité.

$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est injective si $\forall x_1 \neq x_2 \in \mathcal{D}_f \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Rmq. f est injective $\Leftrightarrow$ l'intersection de Γ_f avec toute droite <u>horizontale</u> est au plus égale à un point.

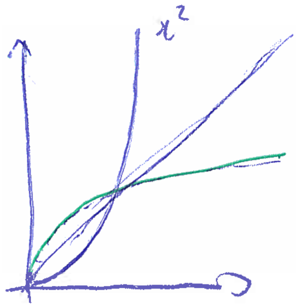
$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est surjective si et seulement si $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$, car toute droite horizontale intersecte Γ_f en au <u>moins</u> un point.

Rmq : $f : \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ est surjective (par définition)

elle est bijective ~~⟺~~ toute droite horizontale de la forme $\{y = c\}$ $c \in f(\mathcal{D}_f)$ rencontre le graphe de f Γ_f en <u>exactement</u> un point.

Dans ce cas, ~~la bijection réciproque~~ $\Gamma_{f^{-1}}$, on obtient le graphe $\Gamma_{f^{-1}}$ de sa bijection réciproque $f^{-1} : f(\mathcal{D}_f) \to \mathcal{D}_f$ en prenant le symétrique de Γ_f par rapport à la droite $y = x$

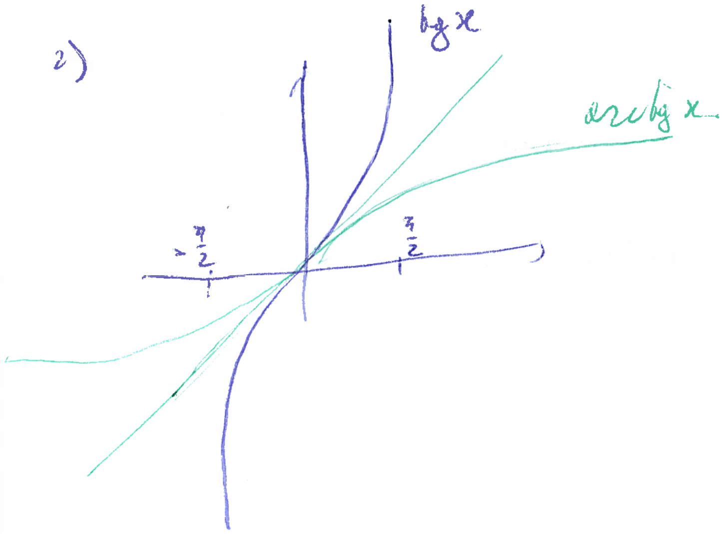
Exemple : 1)



$f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[\Leftrightarrow f(x) = x^2$

$\rightsquigarrow f^{-1} : [0;+\infty[\to [0;+\infty[\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

2)



$f : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \quad f(x) = \tan x$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\quad f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.

Monotonie :

Déf : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $I \subseteq D_f$ un intervalle (non trivial)

~~On dit que f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante~~

~~croissante : $\forall x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (croissante)~~

~~$f(x_1) \geq f(x_2)$ (décroissante)~~

On dit que f est :

croissante (sur I) si $\forall x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

décroissante (sur I) si $\forall x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

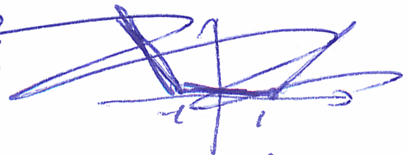
strictement croissante " si " $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

" décroissante " " $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

f est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante).

Exemples : $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

~~$f(x) = \max\{0; |x|-1\}$~~



$f(x) = \max\{x, 0\}$

est croissant sur $\mathbb{R}$,

et strictement croissant sur $[0; +\infty[$.

Rmq. Une fonction constante est à la fois croissant et décroissant.

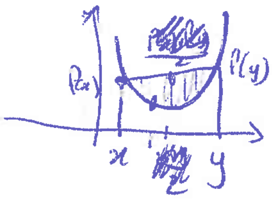
(On verra que si f est dérivable, la monotonie est reliée au signe de la dérivée f'. ($f' \geq 0 \Rightarrow$ croissant $f' \leq 0 \Rightarrow$ décroissant))

Convexité : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction, et $I \subset D_f$ un intervalle.

f est <u>convexe</u> sur I si $\forall x < y \in I$, ~~$\forall t \in [0,1]$~~

~~$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$~~

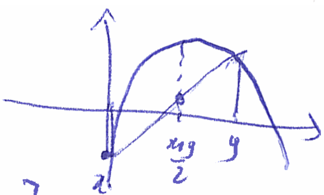
ou ~~analoguement~~



$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall t \in [0,1]$.

f est <u>concave</u> sur I si $\forall x < y \in I$.

~~$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$~~, ~~analoguement~~



$f(tx + (1-t)y) \geq t f(x) + (1-t) f(y) \quad \forall t \in [0,1]$

Exemple x^2 est convexe, $-x^4$ est concave.

x^3 est convexe en $[0; +\infty[$, concave en $]-\infty; 0]$.

Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves

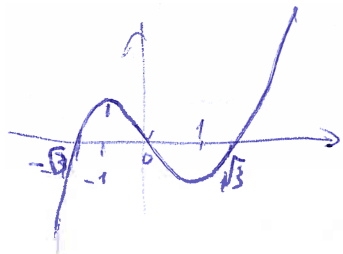
On verra que la convexité/concavité d'une fonction dérivable 2 fois dépend du signe de f''.

Extrema. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1) On dit que f admet un <u>maximum local</u> en $x_0 \in I$ (resp. minimum local) si $\exists V$ voisinage de x_0 ($V =]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset I$) tel que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in V$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in V$)

2) On dit que f admet un <u>maximum global</u> en $x_0 \in I$ (resp. minimum global) si $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$) $\forall x \in I$.

Exemple: $f(x) = x^3 - 3x$



1 est un maximum local

-1 est un minimum local

Sur l'intervalle $[-2;3]$ f admet un minimum global en $+1$ et -2 ($f(+1) = f(-2) = -2$), et un maximum global en $+3$.

Remarquer que -2; $+3$ ne sont pas des extrema locaux.

On verra que les extrema locaux sont liées aux points x_0 avec $f'(x_0) = 0$ (et $f''(x_0) \neq 0$) (pour fonctions dérivables au moins 2 fois)

Proposition: Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction <u>strictement monotone</u>. Alors f est une bijection de D_f sur $f(D_f)$. Sa réciproque bij. est également strictement monotone (de même sens de variation que f)

Preuve. Il suffit montrer que f est injective. Supposons f croissante: $\forall x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Soit $x \neq y$. On peut assumer $x < y$

(à moins de changer le rôle de x et y)

Alors $f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ et f est injective.

Pour la bijection réciproque on obtient que si $f(x) < f(y) \Rightarrow x < y$, donc f^{-1} est croissante. (Pour décroissante c'est analogue)

$\square$

Opérations sur les fonctions

Soient $f: D_f \to \mathbb{R}$ et $g: D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

On peut définir des nouvelles fonctions comme suit.

1)- restriction: $f|_A : A \to \mathbb{R}$ donnée par $f|_A(x) = f(x)$ $\forall x \in A$

- Réunion: si $D_f \cap D_g = \emptyset$, on définit "$f \cup g$" $: D_f \sqcup D_g \to \mathbb{R}$ comme $f \cup g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ g(x) & x \in D_g \end{cases}$.

- Composition: si $f(D_f) \subset D_g$, on définit $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ comme

$g \circ f(x) = g(f(x))$.

~~2) opérations ensemblistes~~

- Addition: Si $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, $f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ donnée par $f + g(x) := f(x) + g(x)$.

- Multiplication ~~[illegible]~~. si $D_f \cap D_g \neq \emptyset$. $f \cdot g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ donnée par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Ex: Multiplication par scalaire $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

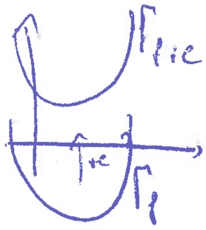
fonction constante λ.

Exemple : translations / homothéties / symétries.

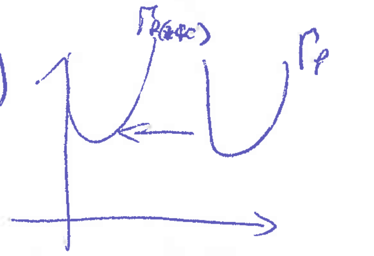
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction.

· $x \mapsto f(x+c)$ a comme graphe le translatée de Γ_f par $-c$ en horizontal

b)



a)



· $x \mapsto f(x)+c$ a comme graphe le translatée de Γ_f par $+c$ en vertical

Soit $\lambda > 0$

· $x \mapsto f(\lambda x)$ a comme graphe le contracté / dilaté de Γ_f d'un facteur $\frac{1}{\lambda}$ en horizontal.

· $x \mapsto \lambda f(x)$ a comme graphe le dilaté / contracté de Γ_f d'un facteur λ en vertical.

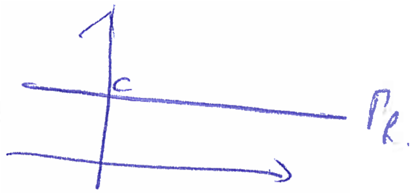
· $x \mapsto f(-x)$ a comme graphe le symétrique de Γ_f par rapport à l'axe des y. (symétrie horizontale)

· $x \mapsto -f(x)$ a comme graphe le symétrique de Γ_f par rapport à l'axe des x. (symétrie verticale)

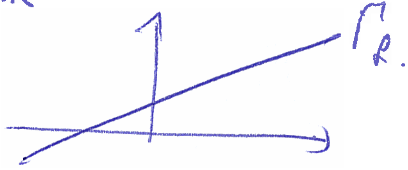
Rmq : $x \mapsto -f(-x)$ a comme graphe le symétrique de Γ_f par rapport à l'origine $(0,0)$ (symétrie centrale).

Exemples des fonctions.

- constantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = c$ $c \in \mathbb{R}$ constant



- (linéaire) affine, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$ $a, b \in \mathbb{R}$



- polynomiale : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

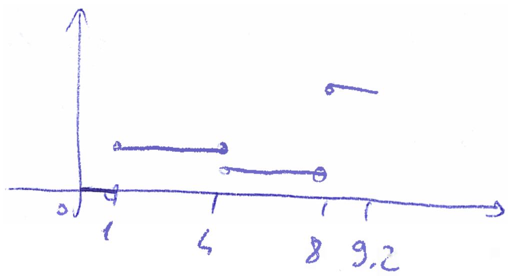
n = degré de l'application.

- fonctions en escalier :

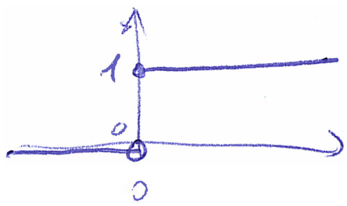
$f : I \supseteq [a,b] \to \mathbb{R}$

si $\exists\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ t.q.

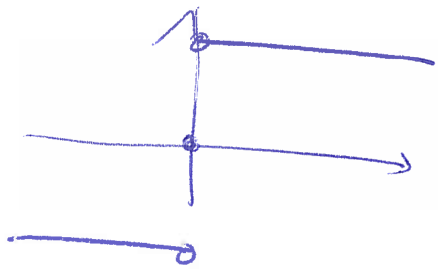
$f|_{]a_j, a_{j+1}[}(x) = c_j$ est constant.



Heaviside $= \chi_{[0,+\infty[}$



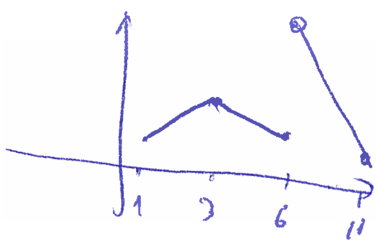
Signe : $\operatorname{signe}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



- Affine par morceaux :

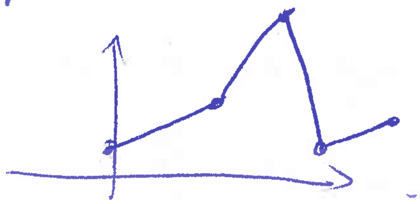
$f : I \supseteq [a,b] \to \mathbb{R}$ si $\exists\ a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$

tq $f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ est affine.

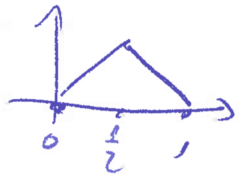


Rmq : d'habitude, on demande ~~[illegible]~~ que $f|_{[a_j;a_{j+1}]}$ soit affine.

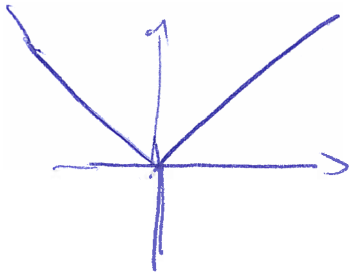
c'est à dire que les morceaux se recollent. bien !



Ex : $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0;\frac{1}{2}] \\ 1-x & x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

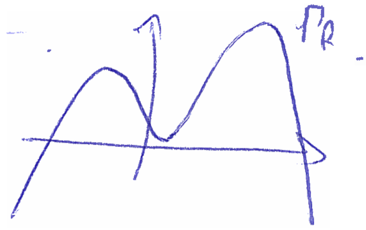


· $f(x) = |x|$



Fonctions polynomiales : $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{R}[x]}}{P(x)} = \underset{\neq 0}{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \qquad (n = \text{degré de } P)$$

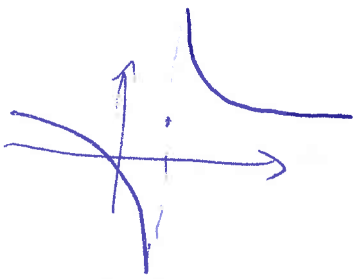


Fonctions rationnelles : de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ P, Q polynômes.

On peut supposer que P et Q n'ont pas de zéro communs. Alors :

$D_{\frac{P}{Q}} = \{x \mid Q(x) \neq 0\}$.

Ex : $f(x) = \frac{x}{1-x}$



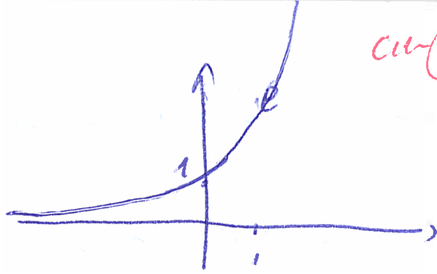
Exponentielle : On appelle $\exp : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$ l'unique fonction dérivable dont la dérivée est égale à elle même, et vaut 1 en 0 :

$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$. exp est dite l'<u>exponentielle</u> de base $e = \exp(1)$.

$\uparrow$ nombre de Néper $= 2{,}71828\ldots$

exp est strictement ~~fonction~~ croissante $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$,

convexe



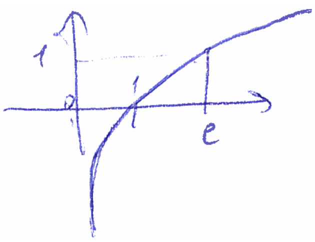
exp peut être aussi définie comme :

- $\exp(x) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (somme infinie, qui est toujours convergente)

- l'unique fonction f t.q. $f(a+b) = f(a).f(b)$, et $f(1) = e$

- $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Logarithme (népérien) : est l'inverse $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de exp



croissant, concave

exponentielle de base a : $a^x = e^{x \log a}$.

logarithme de base a : $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

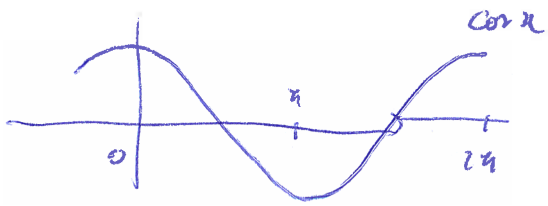
Remarques $\log(xy) = \log x + \log y$ $\forall x, y > 0$, $\log(x^r) = r \log x$ $\forall r \in \mathbb{R}$

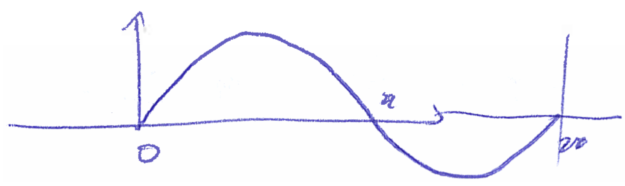
Ex puissances : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$

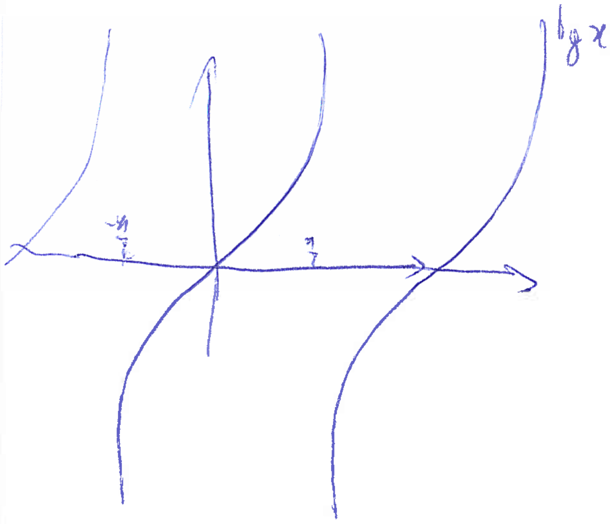
si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow x^\alpha$ est polynomiale. si $-\alpha \in \mathbb{N}$, x^α est rationnelle (pas définie en 0)

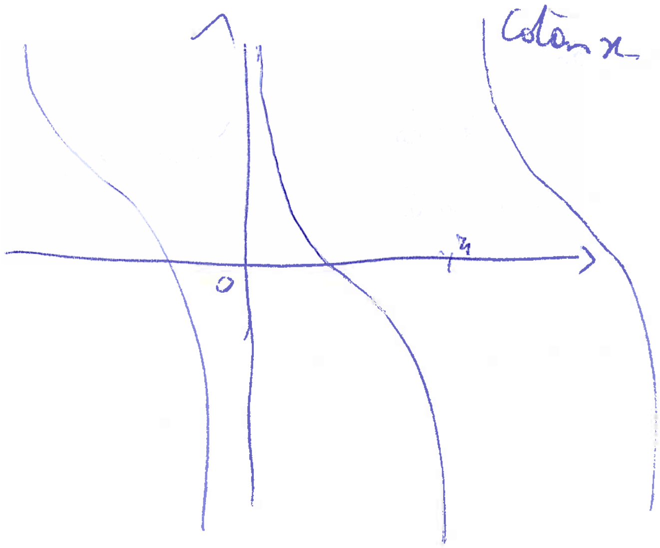
Fonctions trigonométriques : $\cos x$, $\sin x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(périodiques)



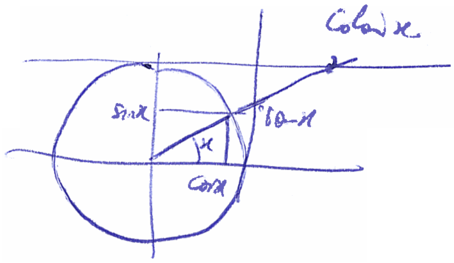






inverses : arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$. arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. arccotan : $\mathbb{R} \to]0, \pi[$

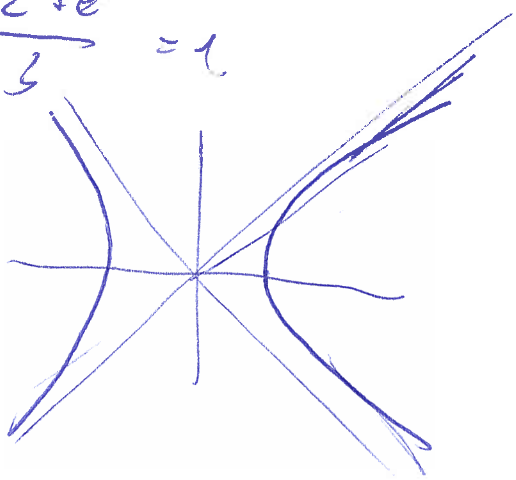


Fonctions trigonométriques hyperboliques.

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

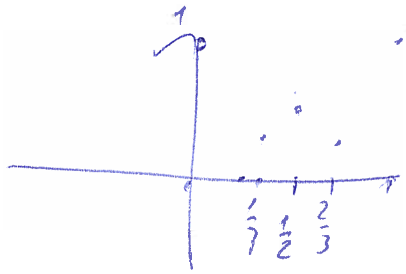
$$\cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \operatorname{sh} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

Rmq. $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$: $\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = 1$



C11-12

Autres exemples :



$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\text{périodique})$$

- Fonction de Dirichlet : $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ fraction irréductible } (q > 0) \end{cases}$

- Fonction de Cauchy : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$

- ~~sin~~ $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$